PERANAN FUNGSI BESSEL
DI BIDANG SISTEM KOMUNIKASI

Oleh :
Dra. Endang Mawarsih
Ir. Thomas Agus Prajitno

ABSTRACT

Many peoples know that's important to study Mathematics but we need several time to understand and using it especially for technicians.

In this literature study we give the relation between Bessel function and frequency modulation technics in communication system.

We have compare mathematics method (using Bessel function), practical method and measurement and we have the results as follows :

For $f_m = 2$ kHz and $\delta = 10$ kHz.

Calculation Band Width with Bessel function = 32 kHz.

Calculation band Width with Practical Method = 24 kHz.

Measurement in laboratory = 32,1 kHz.

1. PENDAHULUAN

Dalam era kemajuan teknologi saat ini dan kemajuan teknologi komunikasi khususnya matematika memegang peranan yang cukup penting. Sehingga kita tak dapat mengabaikan matematika bila ingin dapat menguasai teknologi serta mengikuti perkembangannya.

2. PERMASALAHAN

Orang sering menganggap mata kuliah matematika merupakan mata kuliah yang membosankan serta menghabiskan energi serta pikiran belaka. hal ini tentunya bukan merupakan sesuatu yang mengagetkan, karena :

1. Pembatasan SKS mata kuliah yang ditempuh mahasiswa,
2. Adanya kurikulum nasional yang harus ditempuh mahasiswa,
3. Luasnya bidang matematik yang harus dipelajari.

Yang kesemuanya memberikan dampak terbatasnya contoh-contoh terapan yang dapat diberikan pada mahasiswa. Dan akhirnya orang teknik sering menyimpulkan hasil pengamatan hanya secara teknik dengan landasan matematis yang minim.

3. PERUMUSAN MASALAH

Dengan adanya kenyataan seringkali di bidang terapan pengertian matematis kurang dimanfaatkan untuk menentukan suatu kesimpulan, maka merupakan suatu kebutuhan untuk mengaitkan pemberian teori matematis dengan penerapan di lapangan.

4. IDE DASAR PEMECAHAN MASALAH

Pemberian contoh penerapan matematis di bidang teknik komunikasi dengan pertimbangan :

1. Di bidang komunikasi tak mungkin kita menghindar dari penggunaan gelombang.
2. Dengan adanya penggunaan gelombang tak mungkin akan lepas dari pengertian fisis.
3. Dari pengertian fisis itulah biasa dinyatakan ataupun diekspresikan dalam bentuk matematis.

5. FUNGSI BESSEL

Pada titik singular reguler $x = a$, salah satu penyelesaian dari :

$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$ adalah :

$$y = (x - a)^r \left(C_0 + C_1 - (x - a) + C_2 - (x - a)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

$$= (x - a)^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k - (x - a)^k$$

r adalah bilangan yang dipilih agar $C_0 \neq 0$

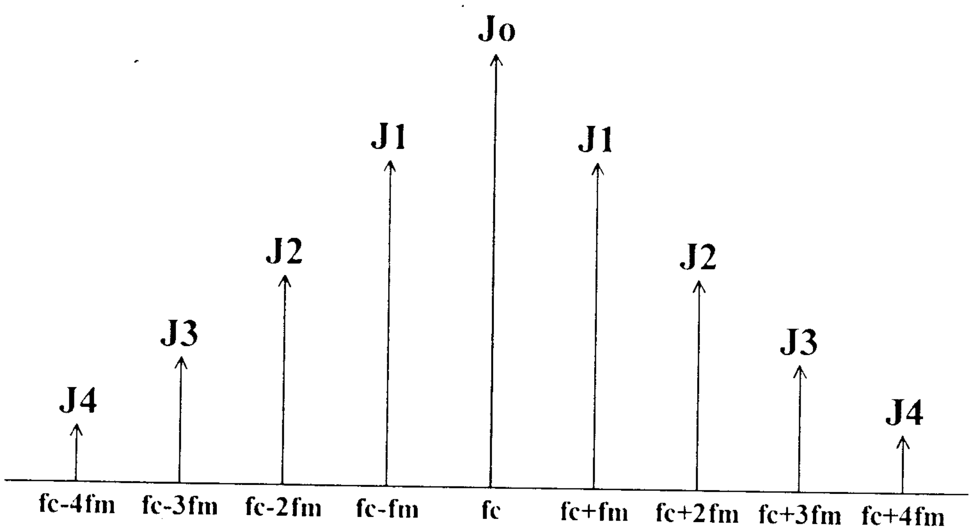
Persamaan differensial Bessel orde n dengan parameter λ =

$t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + t \dfrac{dy}{dt} + (\lambda^2 t^2 - n^2)\, y = 0$ akan mempunyai penyelesaian berupa fungsi Bessel.

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos n\pi - J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & (\text{untuk } n \neq \text{bil bulat}) \\[2em] \lim\limits_{p \to n} \dfrac{\cos p\pi - J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin p\pi} & (\text{untuk } n = \text{bil bulat}) \end{cases}$$

6. SPEKTRUM FREKUENSI

Bentuk persamaan matematis isyarat FM dapat dianggap memenuhi persamaan :
$v(t) = \cos w_c t + \beta - \sin w_m t$
dengan : f_c frekuensi isyarat pembawa; f_m frekuensi isyarat pemodulasi; $\beta = \delta f / f_m =$ indeks modulasi; δf = simpang frekuensi maksimum.
Bila digambarkan seperti pada gambar di bawah.



Spektrum Frekuensi Isyarat Frekuensi Modulasi

Nilai Jo ; J1 ; J2 ; J3 ataupun J yang lain adalah merupakan fungsi dari indeks modulasi β.
Hal ini dapat dilihat pada tabel di bawah yang menunjukkan Fungsi Bessel dengan variabel n dan β.

β / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	.7652	.2239	-.2601	-.3971	-.1776	.1506	.3001	.1717	-09033	-.2459
1	.4401	.5767	.3391	-.06604	-.3276	-.2767	-.004083	.2346	.2453	.04347
2	.1149	.3528	.4861	.3641	.04657	-.2429	-.3014	-.1130	.1448	.2546
3	.01956	.1289	.3091	.4302	.3648	.1148	-.1676	-.2011	-.1809	.05838
4	.002477	.03400	.1320	.2811	.3912	.3576	.1578	-.1054	-.2655	-.2196
5		.007040	.04303	.1321	.2611	.3621	.3479	.1858	-.05504	-.2341
6		.001302	.01139	.04909	.1310	.2458	.3392	.3376	.2043	-.01446
7			.002547	.01518	.05338	.1296	.2336	.3206	.3275	.2167
8				.004029	.01841	.05653	.1280	.2235	.3051	.3179
9					.005520	.02117	.05892	.1263	.2149	.2919
10					.001468	.006964	.02354	.06077	.1247	.2075
11						.002048	.008335	.02560	.06222	.1241
12							.002656	.009624	.02739	.06347
13								.003275	.01083	.02897
14								.001019	.001895	.01196
15									.001286	.004508
16										.001567

* **Harianto, Penggunaan Fungsi Bessel Dalam Komunikasi, halaman 27.**

Untuk β yang lebih kecil isyarat FM hanya berupa frekuensi carrier dan sepasang pita frekuensi :

$$w_c \pm w_m$$

sedang amplitudonya adalah :

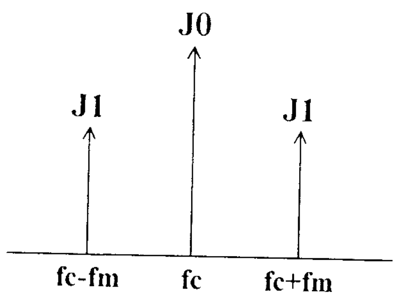
$J_0(\beta)$ untuk isyarat carrier

dan

$J_1(\beta)$ untuk sepasang pita frekuensinya.

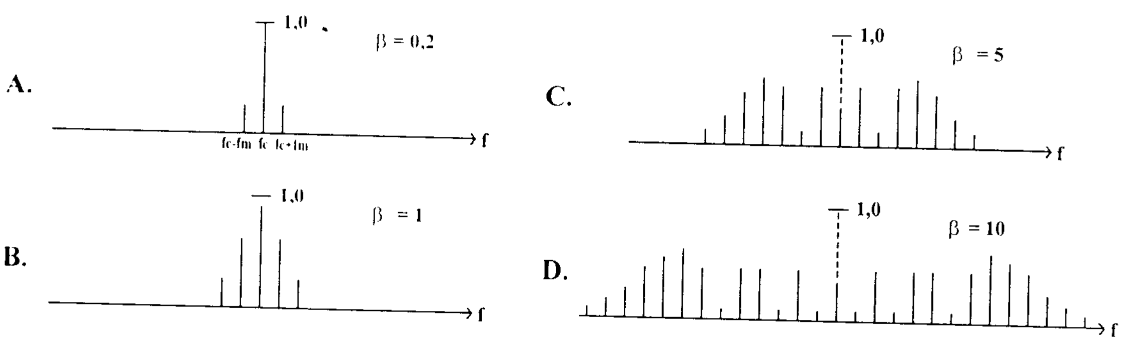
Frekuensi Modulasi (FM) jenis inilah yang biasa dikenal dengan Narrowband Frequency Modulation.

Spektrun frekuensinya seperti pada gambar di bawah.



Spektrum Frekuensi Narrowband Frequency Modulation

Dari tabel di atas menggambarkan beberapa spektrum frekuensi Frequency Modulation untuk beberapa nilai β seperti pada gambar di bawah.



Spektrum Frekuensi FM untuk beberapa nilai β

7. CARA MENENTUKAN BAND WIDTH

Misal frekuensi modulasi = f_m ; simpangan frekuensi maksimum = δ

$\beta = \delta / f_m$; dari tabel dicari nilai n.

Sehingga Band Width = $2 \times f_m \times n$

Contoh :

$f_m = 2$ kHz ; $\delta = 10$ kHz ; $\beta = \delta / f_m = 10 / 2 = 5$

Dari tabel tampak bila tertinggi adalah J8 (5) atau n = 8.

Berarti : Band Width = 2 x 2 kHz x 8 = 32 kHz.

Cara ini dianggap kurang praktis, sehingga dalam praktek biasa digunakan cara pendekatan : $n = \beta + 1$ atau :

Band Width = $2 \times f_m \times (\beta + 1)$

Untuk contoh di atas diperoleh Band Width = 24 kHz.

8. PENGUKURAN

			Perhitungan					Selisih Pengukuran dan Perhitungan			
			Teori Bessel		Cara Praktis		Hasil Pengukuran	Teori Bessel		Cara Praktis	
f_m (kHz)	δ (kHz)	β	n	BW (kHz)	n	BW (kHz)	BW (kHz)	Nominal (kHz)	%	Nominal (kHz)	%
2	10	5	8	32	6	24	32,1	0,1	0,31	8,1	25,23
	8	4	7	28	5	20	26,9	1,1	4,09	6,9	25,65
	6	3	6	24	4	16	22,6	1,4	6,19	6,6	23,08
	4	2	4	16	3	12	14,7	1,3	8,84	2,7	18,37
	2	2	3	12	2	8	11,1	0,9	8,11	3,1	27,93

9. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pengukuran dan perhitungan di atas, dapat disimpulkan bila

1. Secara garis besar hasil perhitungan dengan menggunakan teori Bessel lebih mendekati kenyataan.
2. Cara penghitungan secara praktis umum digunakan karena mudah digunakan.
3. Hasil pengamatan seperti di atas, masih perlu memperoleh perhatian lebih jauh mengingat pengamatan yang dilakukan di atas, hanyalah dengan peralatan yang sederhana (osiloskop), sehingga masalah ralat pembacaan sangat mempengaruhi.

10. DAFTAR PUSTAKA

Churchill, R.V, 1963, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, Mc. Graw - Hill, London.

Ford, Lester R, 1955, *Differential Equations*, Mc. Graw - Hill, New York.

Harianto, 1980, *Penggunaan Fungsi Bessel Dalam Komunikasi*, FTE - UKSW, Salatiga

Hildebrand, Francis R, 1977, *Advanced Calculus for Applications*, 2nd Edition, Prentice Hall, India.

Sneddon, Ian N, 1961, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Interscience Publishers, New York.

Taub and Schilling, 1971, *Principles of Communication System*, Mc. Graw - Hill, Tokyo.

Wylie, C, ay, 1975, *Advanced Engineering Mathematics*, Mc. Graw - Hill, Tokyo.